

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi_k}\right)^2 = R(\xi_k)$$

Их интегрирование дает

$$S = \sum_{k=1}^n \int \sqrt{R(z_k)} dz_k.$$

Как обычно, значения обобщенных координат ξ_k и импульсов η_k вычисляются по формулам

$$\eta_k = \frac{\partial S}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = \varphi_k, \quad \frac{\partial S}{\partial t_0} = t - \varphi_1,$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — произвольные константы, что завершает решение задачи.

Таким же путем интегрируются другие гамильтоновы системы, рассмотренные в данной работе.

7. Изученные гамильтоновы системы имеют множество приложений, особенно в теории солитонов; их нужно выявить и изучить. Полезно также рассмотреть аналогичные системы в комплексном фазовом пространстве, связав их с теорией комплексных квадрик. Заслуживают также внимания связи этих систем с динамическими системами на алгебрах Ли.

Библиографический список

1. Якоби К. Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
2. Neumann C. De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultra-ellipticorum classen revocatur // J. Reine Angew. Math. 1859. B. 56. S. 46-53.
3. Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1981. Т. 36. Вып. 5. С. 109-151.
4. Moser J. Integrable Hamiltonian Systems and Spectral theory. Lezione Fermiane. Pisa, 1981. P. 157-229.
5. Moser J. Geometry of Quadrics and Spectral Theory. The Chern Symposium. 1979. P. 147-188.
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

УДК 514.75

ОБ ОДНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НОРМАЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА ОСНАЩЕННОЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е.Т.И в л е в

(Томский политехнический институт)

В данной статье изучаются некоторые инвариантные поля двойственных линейных подпространств, принадлежащих соответствующим касательным m -плоскостям L_m к оснащенным m -поверхностям S_m в P_{m+1} . С помощью этих полей линейных подпространств выясняется дополнительная геометрическая характеристика оснащенных m -поверхностей $S_m^{A_m}, S_m^{C_m}, S_{m,2}$, изученных в [1], а также проводится одна из возможных классификаций нормальных расслоений на оснащенных m -поверхностях S_m в P_{m+1} . Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] и [2].

I. Каждой точке $A_0 \in S_m$ в соответствующей m -плоскости L_m , касательной к S_m в этой точке, сопоставим подпространства L^1, L^2 :

$$\begin{cases} L^1 \cap L^2 = A_0, \quad L^1 \cup L^2 = L_m, \quad \dim L^1 = r, \\ \dim L^2 = m-r \quad (r < m, \quad r > 1, \quad m-r > 1). \end{cases} \quad (1)$$

Эти подпространства в локальных проективных координатах репера T определим уравнениями:

$$L^1: x_1^{\beta_1} - a_{\alpha_1}^{\beta_1} x_{\alpha_1}^{\alpha_1}, \quad x_0^2 = 0 \quad (2)$$

$(\alpha_1, \beta_1 = 1, 2; \quad \alpha_1 \neq \beta_1; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \tau_1 = \overline{1, r}; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \tau_2 = \overline{r+1, m}),$

где величины $a_{\alpha_1}^{\beta_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla a_{\alpha_1}^{\beta_1} + \omega_{\alpha_1}^{\beta_1} + a_{\alpha_1}^{\gamma_1} a_{\gamma_1}^{\beta_1} \omega_{\gamma_1}^{\alpha_1} = A_{\alpha_1 \alpha_1}^{\beta_1} \omega_0^{\alpha_1}. \quad (3)$$

В дальнейшем будем пользоваться такой фиксацией репера T , при которой

$$L^1 = (A_0, A_1, \dots, A_r), \quad L^2 = (A_0, A_{r+1}, \dots, A_m), \quad (4)$$

что в силу (2) и (3) приводит к соотношениям

$$\begin{cases} a_{\alpha_1}^{\beta_1} = 0, \quad \omega_{\alpha_1}^{\beta_1} = A_{\alpha_1 \alpha_1}^{\beta_1} \omega_0^{\alpha_1}, \\ \nabla A_{\alpha_1 \alpha_1}^{\beta_1} + A_{\alpha_1 \alpha_1}^{\beta_1} \omega_0^{\alpha_1} - \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \omega_{\alpha_1}^{\alpha_1} = A_{\alpha_1 \alpha_1}^{\beta_1} \omega_0^{\alpha_1}. \end{cases} \quad (5)$$

В следующих пунктах данной статьи будут изучаться инвариантные пары двойственных линейных подпространств $L^1 \subset L_m$ на оснащенной m -поверхности S_m в P_{n+1} и ее частных классах, изученных в [1], т.е. пары подпространств L^k , у которых величины $a_{\alpha\beta}^{k_1}$ являются функциями компонент тензоров кручения-кривизны инвариантных связностей расслоений $\Gamma_{m,n}, M_{m,n-m}$ и $A_{m,n-m}$, изученных в [2].

2. С помощью величин ([2], (1), (9)) построим следующие величины, удовлетворяющие с учетом ([1], (3)) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$(6) \quad P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}^{\gamma}, \quad P_{\alpha\beta}^{(2)} = A_{\alpha\beta}^{\gamma}, \quad \nabla P_{\alpha\beta} + 2P_{\alpha\beta}^{(\epsilon)} \omega_{\epsilon}^{\sigma} = P_{\alpha\beta}^{\epsilon} \omega_{\epsilon}^{\sigma} \quad (\epsilon = 1, 2).$$

Из (6) заключаем, что величины $P_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $P_{\alpha\beta}^{(2)}$ образуют несимметрические и не кососимметрические в общем случае тензоры второго порядка в смысле Г.Ф.Лаптева [3]. Эти тензоры в соответствии с [7, с.151] будем называть тензорами Риччи проективитетов $P(v,w)=P(v,w)$, $P(v,w)=A(v,w)$. Так же, как в ([4], (16), (18)), для указанных проективитетов геометрически показываеться, что каждый из тензоров (6) в m -плоскости L_m , касательной к S_m в точке A_0 , сопоставляет следующие инвариантные геометрические образы:

I. Линейный комплекс

$$(7) \quad K: P_{\alpha\beta}^{(1)} V^{\alpha} W^{\beta} = 0, \quad V^2 = 0, \quad W^2 = 0;$$

2. Конус второго порядка с вершиной A_0 .

$$(8) \quad Q_2: P_{\alpha\beta}^{(2)} V^{\alpha} V^{\beta} = 0, \quad V^2 = 0.$$

3. Из ([1], (28) - (32)), ([2], (2), (9)) и (6) получаются следующие соотношения на оснащенных m -поверхностях S_m в P_{n+1} :

$$(9) \quad S_m^1: P_{\alpha\beta}^{(1)} = 0; \quad S_m^4: P_{\alpha\beta}^{(2)} = 0; \quad S_{m,\tau}: P_{\alpha_1\beta_1}^{(1)} = 0, \quad P_{\alpha_2\beta_2}^{(2)} = 0.$$

Поэтому имеет место

Теорема I. В каждой точке A_0 оснащенной m -поверхности S_m^1 или S_m^4 конус $Q \subset L_m$ является неопределенным. Линейное подпространство $\Gamma_{m-2} \subset K$ и $\Gamma_{m-2} \subset Q_2$ в каждой точке $A_0 \in S_{m,\tau}$ в P_{n+1} .

4. В соответствии с определением 2 в ([5], с.42) введем следующее

Определение I. Линейные подпространства L^1 и L^2 в каждом слое L_m точки $A_0 \in S_m$ касательного расслоения $T_{m,m}$ называются главными относительно тензора $P_{\alpha\beta}^{(\epsilon)}$, если они сопряжены относительно комплекса K и конуса Q_2 .

Из (2), (6) - (8) в силу ([2], (2), (9)) и ([5], (15)) получаем, что подпространства $L^1 \subset L_m$ и $L^2 \subset L_m$ в точке $A_0 \in S_m$ будут главными в смысле определения I тогда и только тогда, когда величины $a_{\alpha\beta}^{k_1}$ удовлетворяют системе $M = 2r(m-r)$ неоднородных алгебраических уравнений

$$(10) \quad \Psi_{\alpha_1\beta_1} \equiv P_{\alpha_1\beta_1}^{(1)} a_{\alpha_1}^{k_1} a_{\beta_1}^{k_1} + P_{\alpha_1\beta_1}^{(2)} a_{\alpha_1}^{k_1} a_{\beta_1}^{k_1} + P_{\alpha_1\beta_1}^{(1)} a_{\alpha_1}^{k_1} a_{\beta_1}^{k_1} + P_{\alpha_1\beta_1}^{(2)} a_{\alpha_1}^{k_1} a_{\beta_1}^{k_1} = 0.$$

Можно показать, что в общем случае

$$\text{Rang} [\frac{\partial \Psi_{\alpha_1\beta_1}}{\partial a_{\alpha_1\beta_1}^{k_1}}] = M.$$

Поэтому с учетом (10), теоремы 2 в [5, с.42] заключаем, что имеет место

Теорема 2. В общем случае в каждом слое L_m точки $A_0 \in S_m$ расслоения $T_{m,m}$ имеется конечное число главных подпространств L^1 и L^2 относительно тензора $P_{\alpha\beta}^{(\epsilon)}$ (при каждом $\epsilon = 1, 2$).

5. Из ([1], (27), (3)) следует, что каждой точке A_0 оснащенной m -поверхности S_m в P_{n+1} , не являющейся m -поверхностью S_m^4 ([1], (28)), в m -плоскости L_m отвечает конус второго порядка с вершиной A_0 :

$$K_{m-1} = \{x | x \in [ch \Gamma_n(x) \cap L_m]\}: A_{\alpha_1\beta_1}^{m+1} x^{\alpha_1} x^{\beta_1} = 0, \quad x^2 = 0. \quad (11)$$

Из ([1], (32)) и (11) следует, что на m -поверхности $S_{m,\tau}$ конус K_{m-1} имеет своей вершиной Γ_{m-2} ([1], (31)) и определяется уравнениями:

$$(12) \quad S_{m,\tau} \Rightarrow K_{m-1}: A_{\alpha_1\beta_1}^{m+1} x^{\alpha_1} x^{\beta_1} = 0, \quad x^2 = 0 \quad (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = \overline{1, r}).$$

Легко видеть, что конус (12) в общем случае на $S_{m,\tau}$ не вырождается в конус по крайней мере с $(m-r+1)$ -мерной вершиной, проходящей через Γ_{m-2} , т.е.

$$(13) \quad \det [A_{\alpha_1\beta_1}^{m+1}] \neq 0.$$

Из ([1], (1) - (3), (23) - (27)) следует, что каждому направлению $V = (A_0, A_1) V \in L_m$ в m -плоскости L_m , касательной к S_m в точке A_0 , отвечают две $(m-1)$ -плоскости:

$$G_{m-1}^1(V) = \{W | TA_{m-1}(V) UL_m \cap \Gamma_{m-1} \in ch \Gamma_n(W)\}: A_{m-1}^{\alpha} A_{\alpha\beta}^{m+1} V^{\alpha} W^{\beta} = 0, \quad W^2 = 0;$$

$$G_{m-1}^2(v) = \{w | TA_{m+1}\{w\} \cup L_m \cap \Gamma_{n-m-1} \in ck\Gamma_n\{v\}\} : A_{m+1,\alpha}^{\alpha} A_{\alpha\beta}^{m+1} v^\beta w^\alpha = 0, w^\beta = 0.$$

Отсюда следует, что в m -плоскости L_m , касательной к S_m в точке A_0 , существует инвариантный линейный комплекс

$$K_{m-1}^* = \{(v, w) | w \in [v \in G_{m-1}^1(v) \cap G_{m-1}^2(v)]\} : A_{m+1,\alpha}^{\alpha} A_{\alpha\beta}^{m+1} v^\beta w^\alpha = 0, v^\alpha = 0, w^\beta = 0. \quad (14)$$

Теорема 3. Пары линейных подпространств L^1 и L^2 в m -плоскости L_m каждой точки A_0 оснащенной m -поверхности $S_{m,n}$, на которой конус K_{m-1}^* является невырожденным, будут главными относительно тензора Риччи $R_{\alpha\beta}^{(2)}$ тогда и только тогда, когда L^1 и L^2 сопряжены относительно конуса K_{m-1}^* и L^2 неподвижно при проективитете $\Pi(A_{m+1}) = \{A_{m+1,\alpha}^{\alpha}\}$ ([1], (5)).

Доказательство. Из (6), (10) / $\epsilon = 2/$, ([2], (9)) и ([1], (32)) получаем, что L^1 и $L^2 = \Gamma_{m-2}$ будут главными тогда и только тогда, когда на $S_{m,n}$ выполняются соотношения

$$A_{m+1,\alpha\beta} = 0, \quad A_{m+1,\alpha\beta}^{\alpha} A_{\beta\gamma}^{m+1} = 0,$$

которые с учетом (14) и ([1], (5)) ($x^0 = 0, x^\alpha = 0, x^{m+1} = 0$) и доказывают настоящую теорему.

6. Рассмотрим нормальное расслоение $M_{m,n-m} = (S_m, P_{10})$, о котором шла речь в [2]. В этом расслоении в силу ([2], (24)) задано инвариантное сечение

$$A_0 \rightarrow A_{m+1} \wedge A_0 \rightarrow \Gamma_{n-m-1}, \quad A_0 \in S_m, \quad A_{m+1} \in P_{10}, \quad \Gamma_{n-m-1} \subset P_{10}.$$

При этом дифференциальные уравнения ([2], (23)) называются дифференциальными уравнениями этого сечения.

Будем говорить, что точка

$$x = x^\alpha A_\alpha \in P_{10} \quad (15)$$

и $(n-m-1)$ -плоскость в P_{10}

$$G: g_{\alpha\beta} x^\alpha = 0, \quad x^\alpha = 0, \quad x^0 = 0 \quad (16)$$

параллельно (рекуррентно) переносятся в связности M вдоль кривой ([1], (3)) в смысле [6, С.801], если

$$yx^\alpha + \varphi^\alpha = x^\alpha t^\alpha \theta = 0, \quad \nabla g_{\alpha\beta} - \Psi g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} t^\alpha \theta = 0. \quad (17)$$

Здесь φ и Ψ – некоторые 1-формы. Геометрически это в силу (15) и (16) означает, что $TX \{t\} \in (L_m \cup X)$, а подпространство G и смежное G' к нему вдоль кривой $K(t)$ принадлежат одной и той же гиперплоскости, проходящей через L_m . Из (17) в силу ([1], (3), (24)) следует, что точка A_{m+1} и $(n-m-1)$ -плоскость Γ_{n-m-1}

параллельно переносятся в связности M в направлении t тогда и только тогда, когда на m -поверхности S_m в P_{m+1} выполняются соотношения:

$$G^1: A_{m+1,\alpha}^{\alpha} t^\alpha = 0, \quad t^\alpha = 0; \quad G^2: A_{\alpha\beta}^{m+1} t^\alpha = 0, \quad t^\alpha = 0. \quad (18)$$

Отсюда в силу ([1], (28), (29)) вытекает

Теорема 4. Осищенная m -поверхность $S_m^2(S_m^3)$ в P_{m+1} характеризуется тем, что вдоль нее точка A_{m+1} ($(n-m-1)$ -плоскость Γ_{n-m-1}) абсолютно, т.е. при всех $t \in L_m$, параллельно переносятся в связности M нормального расслоения $M_{m,n-m}$.

7. Из (18) вытекает следующая классификация нормальных расслоений $M_{m,n-m}$ оснащенной m -поверхности S_m в P_{m+1} по соотношениям между числами m и n .

I. Случай $n > 2m$.

В этом случае в m -плоскости L_m , касательной к S_m в точке A_0 , при

$$\text{Rang } [A_{m+1,\alpha}^{\alpha}] = \min(m, n-m-1) \quad (\text{Rang } [A_{\alpha\beta}^{m+1}] = \min(m, n-m-1)). \quad (19)$$

не существует направлений $t \in L_m$, вдоль которых точка A_{m+1} (линейное подпространство Γ_{n-m-1}) параллельно переносятся в связности M .

2. Случай $n < 2m$.

В этом случае существует совокупность G^1 (G^2) всех направлений $t \in L_m$ в каждой точке $A_0 \in S_m$, вдоль которых точка A_{m+1} (подпространство Γ_{n-m-1}) параллельно переносятся в связности M . При этом подпространства G^1 и G^2 определяются соответствующими уравнениями в (18).

Из (16) – (19) следует, что в случае $n < 2m$ подпространства G^1 и G^2 принадлежат линейному комплексу K_{m-1}^* (в каждой точке $A_0 \in S_m$).

Библиографический список

1. Ильев Е.Т. Об одной классификации оснащенных многомерных поверхностей проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.49-56.

2. Ильев Е.Т. Об инвариантных расслоениях и связностях в них на оснащенной поверхности проективного пространства // Там же. 1992. Вып.23 С.41-45.

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погружен-

ных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т. I.
С.275-382.

4. И в л е в Е.Т. Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,k}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1985. Вып. 16. С.23-26.

5. И в л е в Е.Т. Об инвариантных структурах почти произведения пространства аффинной связности // Там же, 1988. Вып. 19. С.39-43.

6. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а - н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С.7-246.

7. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. С.432.

УДК 514.75

ДВОЙНЫЕ ЛИНИИ ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ В P_3

С.В.К и р е е в а

(Московский автодорожный институт)

В настоящей работе продолжается [2] изучение отображения в P_3 , имеющего одномерное и двумерное распределения двойных линий, касательные к которым пересекаются в точках нормализующей плоскости. Получен ответ на вопрос о всем множестве двойных линий отображения, а также описаны фигуры, по которым пересекаются касательные к двойным линиям.

В проективном пространстве P_3 задан диффеоморфизм $\varphi: (\Omega \subset P_3) \rightarrow (\bar{\Omega} \subset P_3)$ $|A \in \Omega \rightarrow B \in \bar{\Omega}$. Семейство $\Pi_2(A)$ нормализует области $\Omega, \bar{\Omega}$ в смысле А.П.Нордена: $A \rightarrow \Pi_2(A), B \rightarrow \Pi_2(A), B \notin \Pi_2(A)$. На прямой (AB) [2] существуют две различные инвариантные точки $M_1^1 = M_2^1, M_3^3: \bar{M}_1^1 = -\gamma^1 \bar{A} + \bar{B}, \bar{M}_3^3 = -\gamma^3 \bar{A} + \bar{B}$, одномерное $\Delta_1|_{\Delta_2}(A) = (AA_3)$ и двумерное $\Delta_2|_{\Delta_2}(A) = (AA_1A_2)$ распределения двойных линий, касательные к которым пересекаются соответственно в точке $A_3 \in \Pi_2(A)$ и по прямой $(A_1A_2) \subset \Pi_2(A)$.

А существуют ли двойные линии отображения φ , касательные к которым пересекаются вне нормализующей плоскости $\Pi_2(A)$?

Дадим ответ на поставленный вопрос.

Пусть прямая (AB) пересекает нормализующую плоскость в точке $C: \bar{C} = \gamma^i \bar{A}_i$ ($i, j, k = 1, 2, 3$); $\bar{B} = \bar{A} + \gamma^j \bar{A}_j$.

Очевидно, что направление (AB) – двойное для отображения φ . Если точка A смещается в направлении (AB) , то точка B смещается в направлении (BC) : $\bar{C} = \gamma^1(\gamma^1 \bar{A}_1 + \gamma^2 \bar{A}_2) + \gamma^3 \bar{A}_3$. При смещении точки A в направлении (AC) : $\bar{C} = \gamma^2(\gamma^1 \bar{A}_1 + \gamma^2 \bar{A}_2) + \gamma^1 \bar{A}_3$, точка B перемещается в направлении (BA) . Как будет показано ниже, направления (AC) , (BC) имеют и еще одну геометрическую характеристику.

Все множество двойных линий отображения φ будет зависеть от положения прямой (AB) .

И сл у ч а й. Пусть прямая (AB) имеет общее положение: $(AB) \neq \Delta_1(A), AB \subset \Delta_2(A)$.

Обозначим $\tilde{C} = (A_3C), \tilde{C} \cap (A_1A_2) = C_1$. Возникает два-распределение $\tilde{\Delta}_2|_{\Delta_2}(A) = (ACA_3)$, любая линия которого – двойная. В самом деле. При смещении точки A в направлении (AM) , где $M \in \tilde{C}, \bar{M} = \mu \bar{C} + \gamma^3 \bar{A}_3$, точка B смещается по направлению (BM) : $\bar{M} = \mu \gamma^1 \bar{C}_1 + \gamma^3 \bar{A}_3$, а т.к. прямые (AB) и \tilde{C} лежат в плоскости $\tilde{\Delta}_2(A)$, то и прямые (AM) и (BM) , лежащие в этой же плоскости, пересекаются. Это и доказывает, что любое направление плоскости $\tilde{\Delta}_2(A)$ – двойное в отображении φ . Можно показать, что других двойных линий, кроме двойных линий распределений $\Delta_1, \Delta_2, \tilde{\Delta}_2$, отображение φ не имеет.

В плоскости $\tilde{\Delta}_2(A)$ существуют два пучка (AM) и (BM) с центрами в точках A и B , которые находятся в проективном соответствии. Точка Y пересечения соответствующих лучей (AM) и (BM) опишет линию второго порядка \bar{K}^2 . В репере

$$\bar{R}^A = \{A, C_1, C_3\}, \bar{C}_1 = \gamma^1 \bar{A}_1 + \gamma^2 \bar{A}_2, \bar{C}_3 = \gamma^3 \bar{A}_3,$$

на плоскости $\tilde{\Delta}_2(A)$ уравнение кривой \bar{K}^2 имеет вид:

$$(\gamma^3 - \gamma^1) \gamma^1 \gamma^3 - \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^0 + \gamma^1 \gamma^0 \gamma^1 = 0, \quad (*)$$

где текущая точка Y имеет координаты $(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^3)$. Ранг матрицы квадратичной формы в уравнении (*) равен трем, а детерминант равен $\gamma^1 \gamma^3 (\gamma^1 - \gamma^3)$. Для рассматриваемого отображения это произведение всегда отлично от нуля.

Итак, касательные к двойным линиям распределения $\tilde{\Delta}_2$ пересекаются по невырожденной кривой второго порядка \bar{K}^2 . Легко проверить, что точки $A(1; 0; 0), C_1(0; 1; 0), C_3(0; 0; 1), B(1; 1; 1)$ (коорди-